APPLICATIONS DU CALCUL INTEGRAL

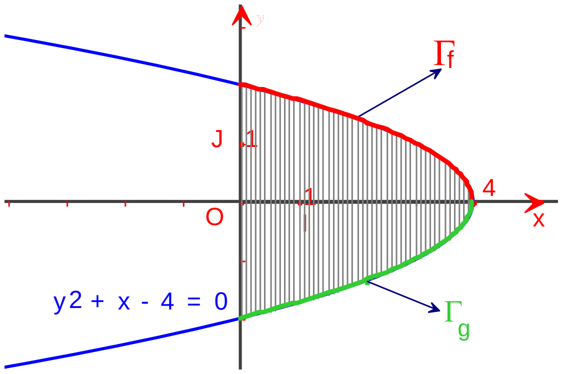
§1 Exemple d'introduction

1.1 Calculer l'aire de la surface comprise entre la parabole d'équation $y^2 = 4 - x$ et l'axe (OJ)

Première démarche :

On peut écrire :

$$y^2 = 4 - x \iff y = \pm\sqrt{4-x} \iff \begin{cases} y = f(x) = \sqrt{4-x} \\ \text{ou} \\ y = g(x) = -\sqrt{4-x} \end{cases}$$



L'aire A recherchée est alors :

$$A = \int_0^4 f(x)\,dx - \int_0^4 g(x)\,dx =$$

$$2\int_0^4 \sqrt{4-x}\,dx = 2\int_0^4 (4-x)^{\frac{1}{2}}\,dx = 2\left[-\frac{2}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = -\frac{4}{3}\left[0 - 4^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{4}{3}\sqrt{4^3} = \frac{4}{3}\left(\sqrt{4}\right)^3 = \frac{4}{3}2^3 = \frac{32}{3}\,[\text{u.s.}]$$

Deuxième démarche :

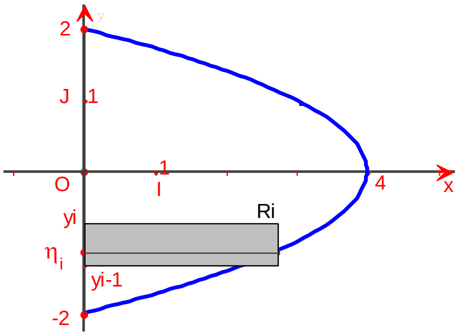
On utilise le théorème de Riemann :

Si f est une fonction continue sur un intervalle [a,b] et si l'on construit une division $\mathcal{D}_n$ de [a,b]

avec $\forall i,\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta_i x = \int_a^b f(x)dx$.

On peut appliquer ce théorème sur toute fonction f continue :

Soit un partage $\mathcal{D}_n$ de l'intervalle [-2,2] sur l'axe des ordonnées (OJ) ; sur chaque intervalle $[y_{i-1},y_i]$, on choisit un nombre η_i quelconque et on construit le rectangle R_i d'aire A_i = base·hauteur = $(4-\eta_i^2)\cdot \Delta_{iy}$.



D'où $A = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (4-\eta_i^2)\cdot\Delta_i y = \int_{-2}^{2} g(y)dy$

avec $g(y) = 4 - y^2$;

ainsi $A = \int_{-2}^{2} g(y)dy = \int_{-2}^{2} (4-y^2)dy = \left[4y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-2}^{2} = (8-\frac{8}{3}) - (-8+\frac{8}{3}) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{48-16}{3} = \frac{32}{3}\,[\text{u.s.}]$

1.2 Utiliser la méthode précédente pour résoudre les exercices suivants :

a) Calculer l'aire de la surface délimitée par la droite d d'équation d : $y = 2x - 4$ et la parabole $\Gamma : y^2 = 4x$;

b) Calculer l'aire de la surface délimitée par les courbes d'équation $x = 1 + y^2$ et $x = 10$;

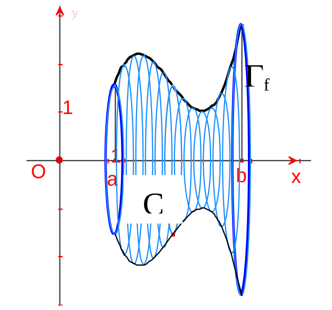
c) Calculer l'aire de la surface délimitée par les courbes d'équation $x = y^2 + 4y$ et $x = 0$;

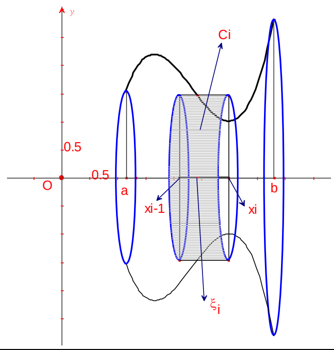
d) Calculer l'aire de la surface délimitée par les courbes d'équation $y = 2 - x^2$ et $y = -x$;

e) Calculer l'aire de la surface délimitée par les courbes d'équation $y = x^{1/3}$, $2y = x - 4$ et $y = 0$.

§2 Calcul du volume d'un corps de révolution

2.1 Révolution autour de l'axe des abscisses (OI)





Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a,b]
et C le corps de révolution obtenu en faisant tourner la surface S délimitée par le graphique Γ_f et l'axe (OI) autour de l'axe des abscisses (OI) ;

Soit une division $\mathscr{D}_n$ de [a,b] et $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$,
soit R_i le rectangle de base $\Delta_{ix} = x_i - x_{i-1}$ et de hauteur $h_i = f(\xi_i)$;
soit C_i le cylindre de hauteur Δ_{ix} et de base $\pi h_i^2 = \pi f^2(\xi_i)$
On a V_i le volume de C_i :
V_i = base · hauteur = $\pi f^2(\xi_i)\cdot\Delta_{ix}$;

D'où $V_n = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\cdot\Delta_{ix}$.

Par Riemann, comme f^2 est continue car f l'est par hypothèse :

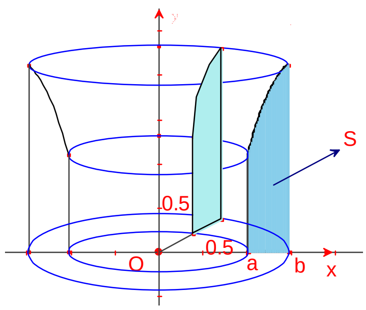
$$V_x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\cdot\Delta_{ix} = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Exercices : a) Calculer le volume d'une sphère de rayon r de deux manières différentes.

b) Calculer le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe (OI) de la surface bornée par $y = \sqrt{x}$, x = 0 et x = 2 .

c) Calculer le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe des ordonnées (OJ) de la surface bornée par $x = y^2 - y - 2$, et x = 0.

2.2 Révolution autour de l'axe des ordonnées (OJ)



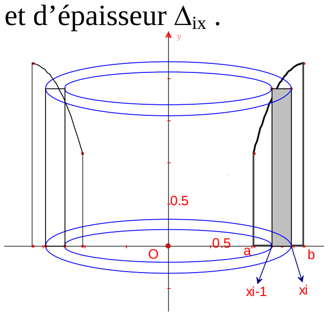
Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a,b]
et C le corps de révolution obtenu en faisant tourner la surface S (délimitée par le graphique Γ_f , l'axe (OI) et les verticales x = a et x = b) autour de l'axe des ordonnées (OJ) .

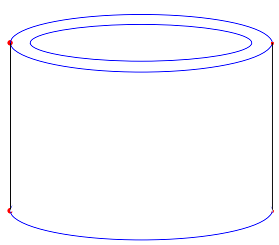
Théorème :

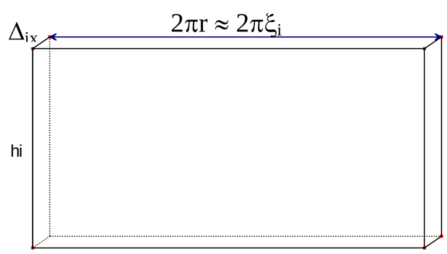
Le volume de ce corps C vaut : $V_y = 2\pi\int_a^b x\cdot f(x)dx$.

Démonstration :

Soit une division $\mathscr{D}_n$ de [a,b] et $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, soit C_i le cylindre évidé de largeur Δ_{ix} et de hauteur $h_i = f(\xi_i)$;
son volume v_i est proche de celui d'un parallélépipède rectangle de hauteur h_i, de longueur $2\pi r$ et d'épaisseur Δ_{ix} .



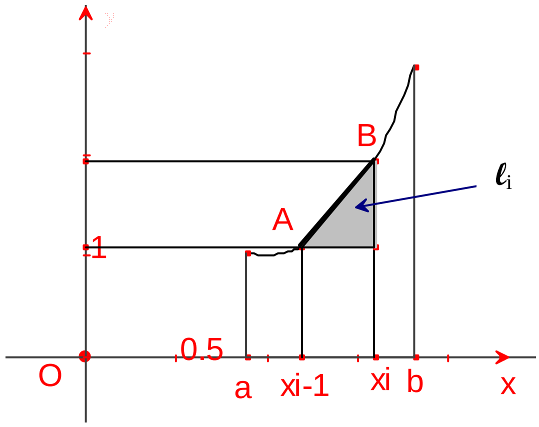




Le volume recherché est donc : $V_y = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} v_i = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi\xi_i f(\xi_i)\,\Delta_{ix} = 2\pi\int_a^b x\cdot f(x)dx$. **CQFD**

§3 Calcul de la longueur d'un arc de courbe

3.1 Formule



Soit une fonction f, continue sur [a,b] ;
on chercher à calculer la longueur ℓ de l'arc du graphique Γ_f sur [a,b].

Soit une division $\mathscr{D}_n$ de [a,b] ; f est continue sur tout intervalle $[x_{i-1},x_i]$: par le théorème des accroissements finis, $\exists \xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ tel que

$$f'(\xi_i)=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x} \Leftrightarrow \Delta_i y=\Delta_i x\cdot f'(\xi_i)$$

Or $\ell_i \approx AB$, d'où $\ell_i^2 \cong (\Delta_i x)^2+(\Delta_i y)^2 \Leftrightarrow \ell_i=\sqrt{(\Delta_i x)^2+(\Delta_i x)^2\cdot(f'(\xi_i))^2}=\Delta_i x\cdot\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}$

Ainsi : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ell_i = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta_i x\cdot\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

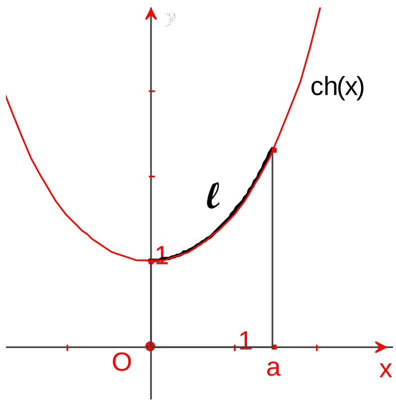
Pour cette dernière égalité, il faut poser les deux hypothèses supplémentaires : f dérivable sur [a,b] et f' continue sur [a,b].

3.2 Exemples

1) Calculer l'arc de chaînette :

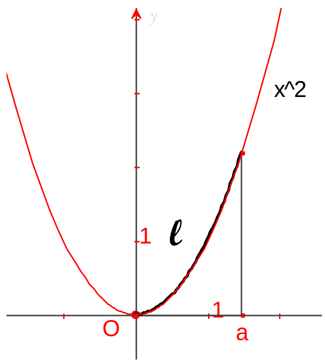
$$\ell=\int_0^a\sqrt{1+(ch'(x))^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{1+(sh(x))^2}\,dx=\int_0^a ch(x)\,dx$$

$$[sh(x)]_0^a=sh(a)$$

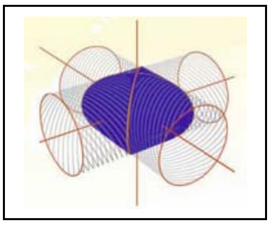


2) Calculer l'arc de parabole :

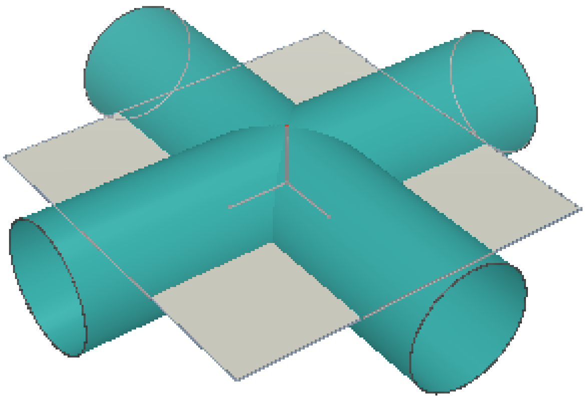
$$\ell=\int_0^a\sqrt{1+(2x)^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{1+4x^2}\,dx=\ldots$$

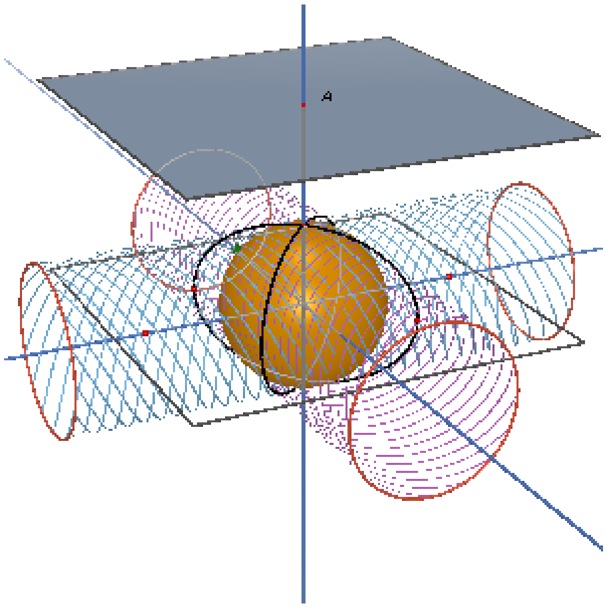


§4 Un exemple particulier : volume de l'intersection de deux cylindres orthogonaux de même rayon R

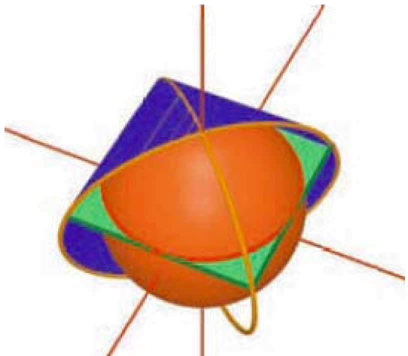


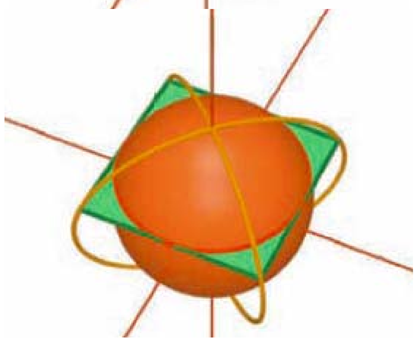
Pour manipuler ces figures Cabri 3D interactives, cliquer sur l'image avec le bouton de droite, puis dans le menu « Objet Cabri3Activedoc » choisir manipuler, puis clic droit enfoncé, bouger la souris.





4.1 Résolution géométrique :



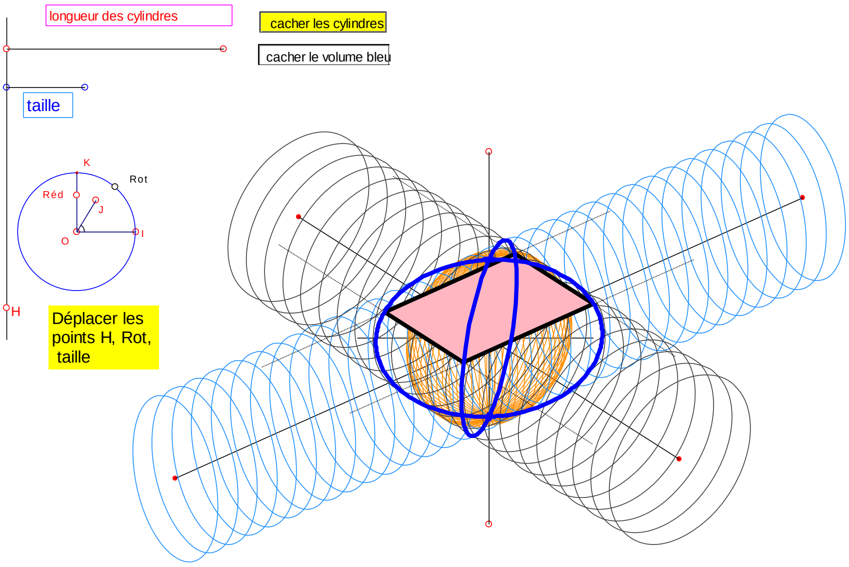


Imaginons une sphère ayant pour centre le point d'intersection des axes des cylindres, et inscrite dans ces deux cylindres en même temps. Si nous coupons cette sphère par un plan parallèle à deux des axes des cylindres, l'intersection obtenue avec la sphère sera un cercle, et celle obtenue avec l'intersection des deux cylindres sera un carré.
Quelle que soit l'altitude du plan, le cercle sera toujours inscrit dans le carré. L'aire de ce cercle (A_{cercle}) de rayon variable R_v est égale à πR_v^2, tandis que l'aire du carré ($A_{carré}$) de côté $2R_v$ est égale à $4R_v^2$.

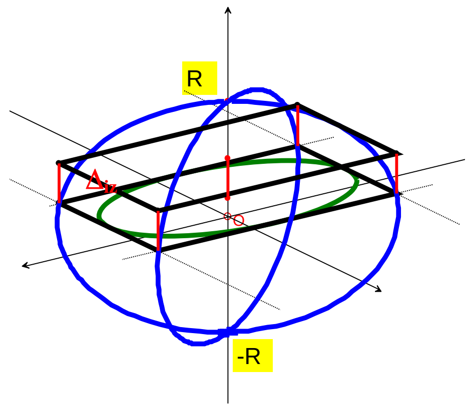
On obtient alors la relation : $A_{carré} = \frac{4}{\pi}$ x A_{cercle}.

Le volume V de l'intersection des deux cylindres est donc égale à $\frac{4}{\pi}$ fois le volume $V_s$de la sphère de rayon R.

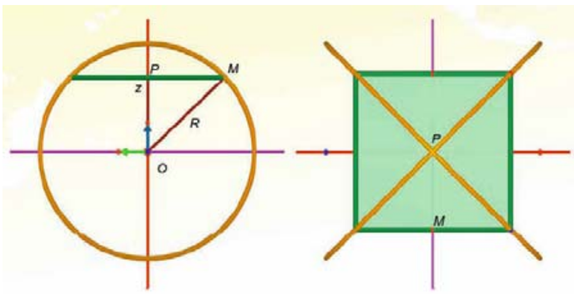
Sachant que $V_s = \frac{4}{3}\pi R^3$, on a : $V = \frac{4}{\pi} \text{ x } \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{16}{3} R^3$[u.v.]



4.2 Résolution analytique :



Soit V_i le volume élémentaire du **parallélépipède** de base le carré obtenu par l'intersection des cylindres et d'un plan parallèle aux deux axes des cylindres et de hauteur Δ_{iz} , longueur de l'intervalle $[z_{i-1}, z_i]$ obtenu par une division $\mathscr{D}_n$ sur l'axe vertical des cotes (OK) de l'intervalle [-R,R].
On a V_i = base · hauteur = $r^2 \cdot \Delta_{iz}$ où r est le côté (variable) du carré.



Soit r = 2·MP le côté du carré. Par Pythagore appliqué au triangle OPM on a : $MP = \sqrt{R^2 - \zeta_i^2}$ où $\zeta_i \in [z_{i-1}, z_i]$;
ainsi $V_i = 4\cdot\left(R^2 - \zeta_i^2\right)\cdot\Delta_{iz}$

Par Riemann :

$$V = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} 4\cdot\left(R^2-\zeta_i^2\right)\cdot\Delta_{iz} =$$

$$\int_{-R}^{R} 4\left(R^2 - z^2\right)dz = 4\,[\, R^2 z - \frac{1}{3}z^3\,]_{-R}^{R} = 4\,[\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) - \left(-R^3 + \frac{1}{3}R^3\right)] = 4[2R^3 - \frac{2}{3}R^3] = 4[\frac{4}{3}R^3] = \frac{16}{3}R^3 \text{ [u.v.]}$$